**概 要**

2003 年 2 月 19 日に出題した問題について、ささきしげきさんから頂いた解答です。ささきさんのご了解を頂いて、ここでご紹介します。

また、その後 Periphereia さんから指摘を頂いたので、(1) 部分についての Periphereia さんの解答と、わたしの考えも附記します。

# 1 問題

たとえば、$142 = 2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14$ といったように、大抵の自然数は 2 つ以上の連続する自然数の和として表わすことができます。さて、このように 2 つ以上の連続する自然数の和として表わすことができない数にはある法則性がありますが、その法則性とはなんでしょう？

# 2 ささきさんの解答

連続する 2 つ以上の整数のはじめの数を $m+1$、最後を $n(m, n \geq 1$、$n-m > 1)$ とおくと、その和は

$$S = \sum_1^n k - \sum_1^m k = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}m(m+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-m)(n+m+1)$$

ここで $n-m$ と $n+m$ の偶奇は一致するから、$S$ は偶数と奇数の積であらわされる。

条件から $n-m$ が 1 になることはない。

また $n+m-1=1$ のとき、$1-m\cdot\ 0$ となり不適

以上より、$S$ は偶数と 3 以上の奇数の積で表されるため、$S$ が 2 のべき乗であることはあり得ない。$\cdots$(1)

次に、奇数の整数倍は連続する 2 つ以上の整数の和で表すことができることを示す。

$n$ を 3 以上の奇数とするとき、一般に

$$S = \sum_1^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

以上の $n$ の倍数は、$n$ 個の連続する整数の和として表される。その理由は次の通り。まず $n$ が奇数だから、$S$ は $n$ で割り切れる。スタート地点をひとつ大きい整数にすれば、和は $n$ 大きくなる。かくして、$S$ 以上の $n$ の倍数が表せる。$\cdots$(2)

次に、

$$S=\sum_{1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

より小さい $n+1$ の倍数、すなわち $n,2n,3n,\cdots,S-n=\frac{n-1}{2}\cdot n$ の $\frac{n-1}{2}$ 個について考える。

$n$ 未満の整数は次のように $n-1$ 個あるが、

$$1,2,3,\cdots,\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2},\cdots,n-1$$

まず、$\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2}$ の和で $n$ を作ることができる。

次に、この 2 数と、その直前・直後の数を合わせた 4 数の和で $2n$ を表せる。以下同様にすれば、$n,2n,3n,\cdots,\frac{n-1}{2}\cdot n$ まで表わすことができる。$\cdots(3)$

以上、(2) と (3) により、奇数の整数倍は連続する整数の和で表せることが示せた。

(1) と合わせると、連続する整数の和で示せない整数は 2 のべき乗であることがわかる。

## 3 Periphereia さんの解答

連続する 2 つ以上の整数のはじめの数を $m+1$、最後を $n(m,n\geq 1,n-m>1)$ とおくと、その和は

$$S=\sum_{1}^{n}k-\sum_{1}^{m}k=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}m(m+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n-m)(n+m+1)$$

ここで $n-m$ と $n+m$ の偶奇は一致するから、$2S$ は偶数と奇数の積であらわされる。条件から $n-m$ が 1 になることはない。また、$m,n\geq 1$ より $n+m+1\geq 3>1$ 以上より、$2S$ は偶数と 3 以上の奇数の積で表されるため、$S$ が 2 のべき乗であることはあり得ない。$\cdots(1)$

以降は同じ。

## 4 私の考え

結局、(1) の部分では S の因数に 3 以上の奇数が含まれる、ということが言えればいいのだと思います。ですから、

以上より、$S$ は必ず 3 以上の奇数を因数に持ち、$S$ は 2 のべき乗ではあり得ない。$\cdots(1)$

で良いかと。これならささきさんの解答でも、Periphereia さんの解答でもオッケーでしょう。